CONTABILIDADE & MATEMÁTICA

Fernando P. Tostes *

Uma aplicação da técnica de programação linear à contabilidade gerencial

Nesse artigo o autor nos traz um exemplo prático do uso de um conhecido instrumento matemático -- programação linear -- para se maximizar a margem de contribuição total da divisão de plásticos de uma empresa e determinar se compensa (ou não) aumentar a capacidade de produção. Nos ensina a identificar e mensurar o custo de oportunidade.

I. A TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR COMO FERRAMENTA DE DECISÃO

Programação Linear é geralmente empregada em decisões sobre como melhor organizar o fluxo de produção fabril -- a determinação do mix de produção ideal -- com preços de venda e custos conhecidos, e uma capacidade produtiva flexível. Entretanto, a técnica de programação linear provou ser muito útil a uma classe de problemas cuja característica essencial é a alocação de recursos escassos entre alternativas que competem entre si. Por exemplo, como investir $1 milhão de dólares, diversificados de tal modo a minimizar o risco de perda e o pagamento de impostos e maximizar o lucro ? Como distribuir determinada quantia entre diversas alternativas, com diferentes taxas de retornos, considerando que 40 a 50% tem que ser em títulos do governo, 20 a 40% em imóveis, e 30 a 60% em ações ? Uma empresa pode comprar 3 tipos de caminhões conforme a tabela a seguir:

Tipo	Ton-Km p/dia	Homem/dia p/veículo	Preço de compra
A	6.300	3	80.000
B	10.800	6	130.000
C	11.340	6	150.000

Quantos caminhões deveria comprar de cada tipo, considerando dispor de no máximo \$4.000.000; 150 homens/dia e um estacionamento limitado a 30 veículos ?

Para problemas de maior complexidade, desenvolveu-se um método algébrico conhecido como *simplex*, que pelo menos em teoria é capaz de enfrentar um número ilimitado de variáveis e de equações. Atualmente, os problemas de programação linear são solucionados por computador, através de diversos softwares disponíveis no mercado. Entre os mais conhecidos estão o Excel e o Quattro Pro, além de outros encontrados no meio acadêmico de uso mais simples.

II. UM EXEMPLO PRÁTICO

CASTROL DO BRASIL fica localizada na cidade do Rio de Janeiro, é uma empresa produtora de óleos e aditivos para motores em geral, porém mais voltados para automóveis e caminhões. Existem dois estabelecimentos industriais: uma fábrica de aditivos e uma de embalagens plásticas. O óleo, matéria prima principal, é comprado da Petrobrás, misturado a outras matérias primas adquiridas do mercado nacional, processado internamente, embalado e vendido em frascos de plástico. As embalagens são fabricadas no município de Campo Grande, em unidade própria através de máquinas extrusoras modernas, suficiente para abastecer atualmente a demanda da unidade industrial da CASTROL com folga.

O ativo da Divisão de Embalagens é composto de uma fábrica independente, com terreno, prédio, máquinas extrusoras e central de utilidades (energia elétrica, tratamento de água, etc), totalizando US$3.7 Milhões. Juridicamente a administração optou por colocá-la como filial, com objetivo de economizar impostos. Seus produtos se constituem de quatro tipos de frasco -- 200ml, 500ml, 1000ml e 5000ml -- e toda sua produção é transferida a Indústria de óleos automotivos.

A CASTROL adota o método de Custo Total para estabelecer o *preço de transferência,* isto é, o preço pelo qual os produtos fabricados numa divisão são transferidos a outra divisão da mesma empresa. Na determinação do custo de produto, os inventários são valorizados
pelo critério de custo médio e a matéria prima é acrescida do custo indireto (mão de obra e custos fixos de fabricação).

A **Figura 1** mostra um exemplo para o produto "CASTROL GTX". O custo da embalagem tem dois componentes: a matéria prima (plástico) mais o custo fixo rateado de acordo com a quantidade produzida. O produto principal é um composto de óleo, misturado a vários aditivos químicos. Em todas as etapas da produção apropriação de custo fixo ao produto final por meio de rateio. Observe que o custo fixo da fábrica de embalagens é computado separadamente da industria, e que o custo total obtido se torna o preço de transferência dos produtos produzidos naquela divisão.

FIGURA 1: FLUXO DE APROPRIAÇÃO DE CUSTO PARA PRODUTO CASTROL-GTX

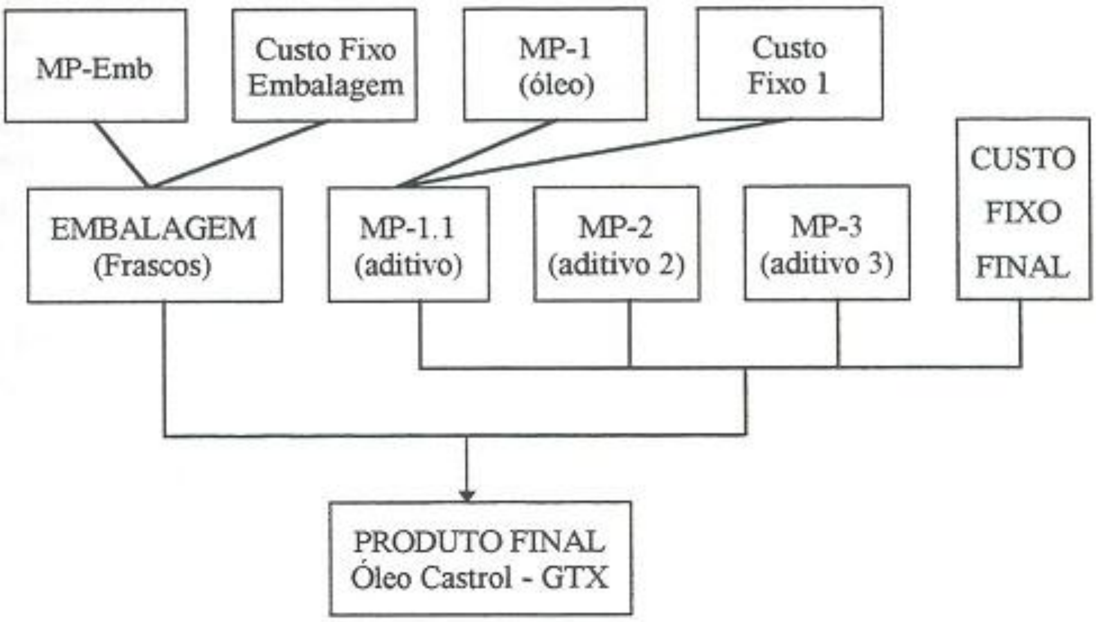
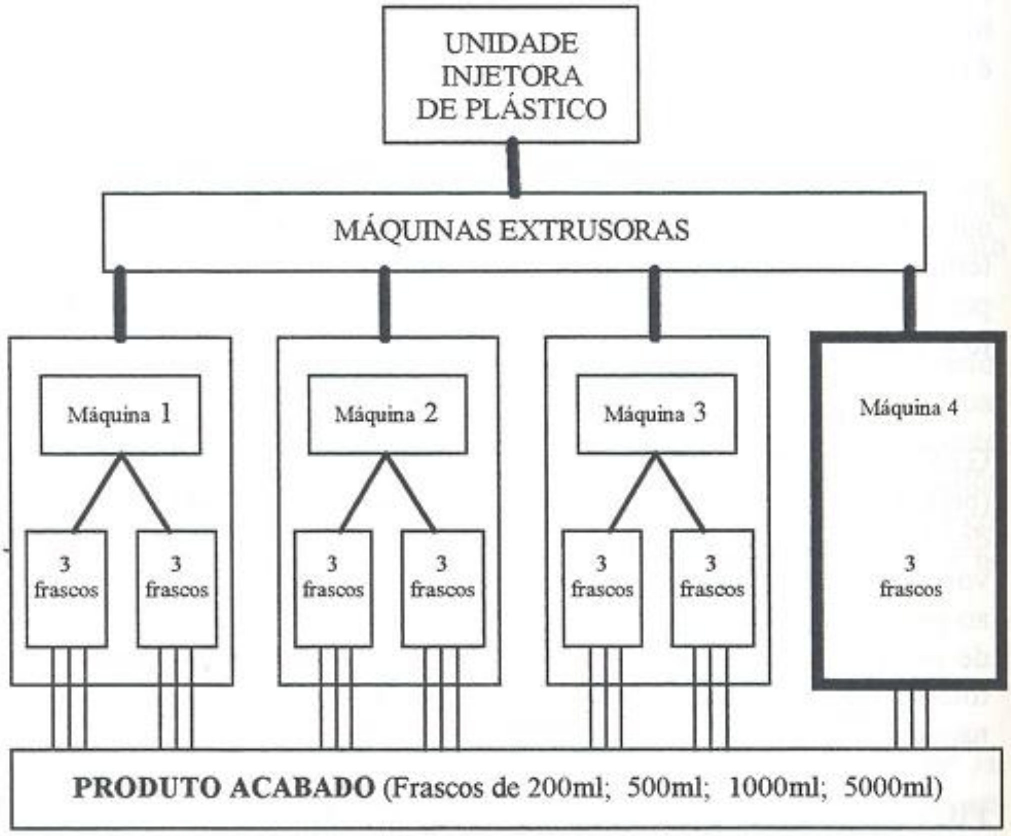


FIGURA 2: DESCRIÇÃO DO PROCESSO PRODUTIVO DE FRASCOS DE EMBALAGEM



O processo produtivo da fábrica de frascos, ilustrado na **Figura 2**, envolve uma unidade central de distribuição da matéria prima entre 4 máquinas extrusoras de plástico. À exceção da Máquina 4, cada máquina possue dois moldes, cada um produzindo 3 frascos. Logo, as máquinas de molde duplo fazem 6 frascos a cada 14 segundos de ciclo produtivo, enquanto a máquina simples de um molde finaliza 3 frascos por ciclo de 26 segundos.

A **Tabela 1** ilustra o cálculo da **Margem de Contribuição** de cada tipo de frasco e a capacidade produtiva ***diária*** (em 1000 unidades).

A capacidade é limitada pelo *número de moldes disponíveis*. Por exemplo, existem atualmente apenas 3 moldes para produção do frasco de 200ml, suficientes para abastecer a máquina 1 (dois moldes) e a máquina 4 (um molde).

TABELA 1				
FRASCO MARGEM DE CONTRIBUIÇÃO UNITÁRIA				
Frasco (ml)	Valor de Mercado	Custo Variável	Margem de Contrib.	Capacidade Produção
200	0,124	0,068	0,056	47175
500	0,192	0,135	0,057	38887
1000	0,271	0,182	0,089	80963
5000	0,882	0,573	0,309	3200

Na **Tabela 2** abaixo está a distribuição da capacidade produtiva diária por máquina e produto.

TABELA 2					
PRODUÇÃO DIÁRIA POR MAQUINA					
PRODUTO	M1	M2	M3	M4	TOTAL
F1=200ml	31450	0	0	15725	47175
F2=500ml	0	25925	0	12962	38887
F3=1000ml	23162	23162	23162	11477	80963
F4=5000ml	0	0	0	3200	3200

A produção de cada produto está limitada pelo número de máquinas e de moldes disponíveis, mas como os frascos podem ser processados em qualquer máquina, a limitação acaba sendo apenas pelo número de moldes. Por exemplo, como existem apenas três moldes para produção de frascos de 200ml, esta é a soma da capacidade da máquina 1 (31.450) com a máquina 4 (15.725) e é igual a 47.175 unidades.

Se não houvesse a restrição de moldes a fábrica poderia produzir 31.450 x 3 = 94.350 + 15.725 = 110.075 frascos. É o caso do frasco de 1000ml, cuja produção é de 80.963 frascos/dia {(23.162 x 3) + 11.477}.

A segunda restrição se refere ao *tempo disponível das máquinas - 24 horas*. Uma vez que todos os produtos, exceto F4, podem ser fabricados em qualquer máquina, *o problema consiste em saber qual o melhor mix de produção de modo a assegurar a maior margem de contribuição total*.

Existe uma restrição adicional relativa à *cor dos frascos*: conforme o corante empregado, o tempo de set-up da máquina é diferente, o que altera o tempo de produção inicial. Além disso, conforme o corante a capacidade produtiva diária é diferente.

Não foi possível obter informação sobre os diferentes tempos para cada produto.

Foram feitas ***duas suposições : todos os frascos são brancos (não há corante) e considera-se que não há restrição de demanda***, podendo toda produção ser vendida, (interna ou externamente) sem necessidade de moldes adicionais para frascos de formatos diferentes.

Na prática o tempo de ociosidade seria preenchido com outro produto -- garrafa de CocaCola, por exemplo -- que irá apresentar outra estrutura de custos.

Levando em conta as restrições e as suposições acima, podemos montar a função objetiva de nossa programação linear, apresentando-a seguir:

$$\text{Max } Z = Mc1\,(F11+F12+F13+F14) + Mc2\,(F21+F22+F23+F24) + $$
$$+\, Mc3\,(F31+F32+F33+F34) + Mc4\,(F44)$$

sujeito a:

$t11\,F11 + t12\,F12 + t13\,F13 + t14\,F14 <= CAP1$
$t21\,F21 + t22\,F22 + t23\,F23 + t24\,F24 <= CAP2$
$t31\,F31 + t32\,F32 + t33\,F33 + t34\,F34 <= CAP3$
$t44\,F44 <= CAP4$
$F11, F12, \ldots\ldots, F44 >= 0$

onde,

Z = margem de contribuição total
t11 é o tempo necessário para produzir 1000 unidades do Produto 1 (frascos de 200ml) na máquina 1; t12 = tempo de produção de 1000 unidades do Produto 1 na máquina 2, e assim por diante. Por exemplo, t11 = (24h x 1000unid) / 31450 (capac. maq. 1) = 0.7631 Þ = t12 = t13

As máquinas 1, 2 ou 3 demoram, cada uma, 0,7631 horas (45,786 min) para produzir 1000 frascos de 200ml.
F11 é o número de unidades do produto 1 fabricadas na máquina 1 por dia; por exemplo, pela Tabela 2 sabemos que F11 = 31.450 [1].
Mc1 (F11+F12+F13+F14) é a margem de contribuição unitária (obtida na Tabela 1) do produto 1 (F1) multiplicada pela produção total do produto 1 em todas as máquinas.
CAP1 = capacidade de produção máxima do produto 1 (Tabela 1). É igual ao tempo total em horas x 1000, por dia, disponível para a fabricação do Produto 1, em todas as máquinas. Para o produto 1 são duas máquinas, logo (24 x 1000)x2 = 48000

t11 = (24 x 1000) / 31450 = 0.7631 Þ = t12 = t13
t14 = (24 x 1000) / 15725 = 1.5262
t21 = (24 x 1000) / 25225 = 0.9257 Þ = t22 = t23
t24 = (24 x 1000) / 12924 = 1.8515
t31 = (24 x 1000) / 23162 = 1.0362 Þ = t32 = t33
t34 = (24 x 1000) / 11477 = 2.0723
t44 = (24 x 1000) / 3200 = 7.5

Em decorrência da restrição ao número de moldes para os produtos 1, 2 e 4, algumas máquinas terão produção igual a zero. Por exemplo, como só existem 3 moldes para o Produto 1, dois são instalados na máquina 1 e um na máquina 4 (F11, F14 >= 0). Porém, as máquinas 2 e 3 nada produzirão do Produto 1 (F11, F13 = 0). O mesmo ocorre para o Produto 2. No caso do Produto 3, existem moldes suficientes para ocupar todas as máquinas, cuja produção é igual; logo F31 = F32 = F33 >= 0. Finalmente o Produto 4, que só pode ser fabricado na máquina 4 -- a qual suporta apenas um molde -- F44 >= 0

Assim,
F12 = 0
F13 = 0
F21 = 0
F23 = 0
F11, F14, F22, F24, F31, F32, F33, F34 > = 0
F44 >= 0
F31 = F32 = F33

[1] (24h = 1440min; logo 1440 / 45,786 min = 31,45 = nº de vezes em um dia que a máquina 1 fabrica 1000 frascos. Assim, 31,45 x 1000 = 31450 frascos por dia.)

Podemos agora reescrever a função objetiva, simplificando-a, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = {} & Mc1\ (F11 + F14) + Mc2\ (F22 + F24) + \\ & + Mc3\ (3\ F31 + F34) + Mc4\ (F44) \end{aligned}$$

sujeito a:

$t11\ F11 + t14\ F14 <= CAP1$

$t22\ F22 + t24\ F24 <= CAP2$

$3\ t31\ F31 + t34\ F34 <= CAP3$

$t44\ F44 <= CAP4$

E usando os números já divulgados obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = {} & 0.056\ (F11 + F14) + 0.057\ (F22 + F24) + \\ & + 0.089\ (3\ F31 + F34) + 0.309\ (F44) \end{aligned}$$

sujeito a:

$0,7631\ F11 + 1.5262\ F14 <= 48000$

$0.9257\ F22 + 1.8515\ F24 <= 48000$

$3.1086\ F31 + 2.0723\ F34 <= 96000$

$7.5\ F44 <= 24000$

Para resolver o problema na forma de Programação Linear, usou-se um programa de computador -- QSB2, comum nas universidades. O relatório com a solução final é apresentado abaixo:

TABELA 3

	RELATÓRIO RESUMO PARA CASTROL - I PARTE				
		Custo de	Coef. de	Mínimo	Máximo
Variável	Solução	Oportunidade	Objetividade	Coef. Objet	Coef. Obj.
F11	+62901.324	0	+0,0560000	+0,280000	+ infinito
F14	0	+0,0560001	+0,0560000	- infinito	+0,1120000
F22	+51852.652	0	+0,0570000	+0,028498	+ infinito
F24	0	+0,0570061	+0,0570000	- infinito	+0,1140061
F31	+30882,070	0	+0,2669999	+0,133506	+ infinito
F34	0	+0,0889913	+0,0890000	- infinito	+0,1779913
F44	+3200,0002	0	+0,3089999	0	+ infinito
Função Objetiva Maximizada = **15,712.39**					
Num. de iterações = 5					

Na coluna "solução" aparece a produção ótima para cada produto em cada máquina. Substituindo os números apresentados na função objetiva temos,

$$\text{Max } Z = Mc1\,(F11 + F14) + Mc2\,(F22 + F24) + Mc3\,(3\,F31 + F34) + Mc4\,(F44)$$

$$Z = 0.056\,(62901.324 + 0) + 0.057\,(51852.652 + 0) + 0.267\,(30882.070 + 0) + 0.309\,(3200.0002)$$

$$Z = 15712.39$$

\$15,712.39 é a margem de contribuição máxima que se pode obter *com as restrições do problema.*

Na coluna "custo de oportunidade" aparece o valor que a firma perde ao deixar de produzir determinado produto. Por exemplo, a Divisão perde aproximadamente \$0.056 de margem de contribuição unitária por produzir 0 na máquina 4 de F1 (frasco de 200 ml).

"Coeficiente de objetividade" são os coeficientes constantes da função objetiva.

"Mínimo Coeficiente de Objetividade" é o valor mínimo que a margem de contribuição total pode ser reduzida sem afetar a solução final.
Por exemplo, 0.028 x 62901.324 = \$1761,24

"Máximo Coeficiente de Objetividade." é o valor máximo que a margem de contribuição total pode aumentar sem afetar a solução final.

O quadro seguinte, complementar ao primeiro, traz informações relativas às restrições.

	RELATÓRIO RESUMO PARA CASTROL - 2a PARTE					
Restrições	Status	RHS	Shadow Price	Falta ou Sobra	Mínimo RHS	Máximo RHS
1	s/ folga	<+48000.0	+0,07338488	0	0	+ infinito
2	s/ folga	<+48000.0	+0,06157502	0	0	+ infinito
3	s/ folga	<+48000.0	+0,08589076	0	0	+ infinito
4	s/ folga	<+48000.0	+0,04120000	0	0	+ infinito

A coluna "Status" indica a existência de folga. "s/ folga" (tight) significa que com a aplicação da solução ótima, não há folga de produção nas máquinas. Se o status fosse "c/ folga" (Loose) indicaria a presença de uma folga não aproveitada.A coluna RHS (Right Hand Side) apenas evidencia as restrições de produção para cada produto.

A coluna "Falta ou Sobra" (Slack or Surplus) mostra se existe falta ou sobra de capacidade produtiva. No caso há falta; se houver sobra, não haverá shadow price.

"Mínimo e Máximo RHS" (Right Hand Side) é o intervalo em que as restrições podem variar.

III. O SIGNIFICADO DO "SHADOW PRICE"

"Shadow Price" evidencia o **custo de oportunidade.** É *o que a empresa deixa de ganhar em margem de contribuição por não ter uma hora disponível de máquina.* Se o "shadow price" excede o custo de expansão de capacidade, então é vantajoso realizar investimento adicional no determinado recurso escasso.

Para compreendê-lo melhor, imaginemos que a CASTROL resolvesse comprar um molde adicional do produto 1 (frasco de 200ml) para a maquina 2 (F12). A capacidade produtiva passaria para:

	M1	M2	M3	M4	TOTAL
F1	31450 +	31450 +	0 +	15725 =	78625

Como a capacidade de M1 = M2, as duas juntas são F11+F12= 2F11, e a função objetiva passaria então a:

$$\text{Max } Z = Mc1\,(2F11 + F14) + Mc2\,(F22 + F24) + \\ + Mc3\,(3\,F31 + F34) + Mc4\,(F44)$$

sujeito a:

$\boldsymbol{2\,t11\,F11} + t14\,F14 <= CAP1$

$t22\,F22 + t24\,F24 <= CAP2$

$3\,t31\,F31 + t34\,F34 <= CAP3$

$t44\,F44 <= CAP4$

Colocando os parâmetros numéricos,

$$\text{Max } Z = 0.056\,(2F11 + F14) + 0.057\,(F22 + F24) + \\ + 0.089\,(3\,F31 + F34) + 0.309\,(F44)$$

sujeito a:

a) 0.7631 ***(2F11)*** + 1.5262 F14 <= ***72000***

ou

1.52610 F11 + + 1.5262 F14 <= ***72000***

b) 0.9257 F22 + 1.8515 F24 <= 48000

c) 3.1086 F31 + 2.0723 F34 <= 96000

d) 7.5 F44 <= 24000

Observe-se que a capacidade (Cap1) aumentou de 48 horas por 1000 frascos (48000), para 72000.

Processando novamente o problema no computador, o relatório resumo se altera conforme abaixo:

TABELA	RELATÓRIO RESUMO MODIFICADO PARA CASTROL				
		Custo de	Coef. de	Mínimo	Máximo
Variável	Solução	Oportunidade	Objetividade	Coef. Objet	Coef. Obj.
F11	+47179,082	0	+0,1120000	+0,059963	+ infinito
F14	0	+0,0560001	+0,0560000	- infinito	+0,1120073
F22	+51852.652	0	+0,0570000	+0,028498	+ infinito
F24	0	+0,0570061	+0,0570000	- infinito	+0,1140061
F31	+30882,070	0	+0,2669999	+0,133506	+ infinito
F34	0	+0,0889913	+0,0890000	- infinito	+0,1779913
F44	+3200,0002	0	+0,3089999	0	+ infinito
Função Objetiva Maximizada = Z = **17473.97**					
Num. de iterações = 5					

A margem de contribuição total *diária* com um molde adicional é de \$17473,97 -- \$1.761,58 a mais do que mostrado anteriormente. O que se deixa de ganhar em Margem de Contribuição (MC) unitária para o produto 1 pode ser demonstrado da seguinte forma:

$$Z = 17473,97$$

MC Total com aumento de um molde (24 horas/máquina)

$$Z = \frac{(15712,39)}{1761.58}$$

solução original "shadow price" ou custo de oportunidade, ou perda de MC por não ter capacidade adicional (+ 1 maquina trabalhando /24 h), dividido por 24000 número adicional de horas x 1000 frascos = $ 0,0734 $\simeq$ 0,07338488 que é o "shadow price" por unidade, apresentado na Tabela 4; a MC por frasco perdida por não ter 1 molde adicional nas máquinas 2 ou 3.

IV. ANÁLISE DO RESULTADO

1. Em 1994 a fábrica de embalagens da CASTROL previa em seu orçamento uma margem de contribuição total de US$5.2 Milhões para 1994, o que equivale a US$14.372 por dia. No programa que acabamos de expor a margem diária subiu para US$15.712,39 (equivalente a US$5.68 Milhões anuais). A diferença pequena (9%) é devido à simplificação do problema, com o uso de apenas frascos brancos, para torná-lo mais didático, e sugere que a fábrica opera com eficiência. Na vida real teríamos de incluir a produção de tampinhas, diferentes tempos de limpeza das máquinas e possivelmente outras variáveis.

2. O emprego de programação linear através de softwares de computador nos permite conhecer rapidamente a conseqüência financeira de decisões alternativas imaginadas pela gerência. No exemplo, presumindo que exista demanda para a produção adicional, a decisão de *não* investir em mais um molde para frascos de 200ml, levaria a divisão de embalagens da CASTROL a deixar de ganhar em margem de contribuição R$1.761,58 *por dia* (cerca de US$2,098).

3. A CASTROL DO BRASIL, poderia melhorar seu critério para estabelecer *preços de transferência.* Ao transferir a produção de frascos pelo custo total, incluindo rateio de despesas indiretas, não visualiza o seu *custo de oportunidade real*. Se adotasse o *valor de mercado* como critério, poderia observar melhor o quanto lucra ou deixa de ganhar com suas decisões gerenciais.

4. Mesmo com o método atual de apuração de custo e com as simplificações adotadas, ainda assim a técnica de programação linear provou ser útil para se racionalizar o fluxo de produção. A solução ótima encontrada no problema indica o caminho que a gerência deve seguir para maximizar sua margem de contribuição.

5. Programação Linear pode também ser usada para problemas de tesouraria, investimentos em ativo imobilizado, custos e diversos outras áreas de uma empresa.

V. LIMITAÇÕES AO EMPREGO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NA CONTABILIDADE

O maior problema com o emprego da técnica de programação linear em contabilidade é a *fraca* base de educação matemática observada nos profissionais da área contábil. Para se usar programação linear é necessário conhecimento de álgebra, estudar com profundidade a técnica e exercitá-la com freqüência. Todas essas condições estão em geral ausentes nos cursos de contabilidade acadêmicos ou de treinamento executivo.

Sem a base matemática o profissional deixa de usar não apenas a programação linear, mas também a variada gama de técnicas estatísticas de grande utilidade em auditoria, análise de balanços, contabilidade de custos e, principalmente, pesquisa empírica. Revistas internacionais de contabilidade publicadas por universidades *e associações de classe* publicam cada vez mais pesquisas e artigos com extenso uso de instrumental quantitativo.

Em contabilidade, o Brasil desfruta de boa reputação internacional, graças ao trabalho de pesquisa dos efeitos inflacionários sobre as operações financeiras e a posterior legislação societária que adotou o conceito. Se os contabilistas brasileiros desejam manter o atual status, é o momento de aumentar o estudo em matemática nos cursos de treinamento das empresas e o número de disciplinas quantitativas nos cursos de graduação.

Mesmo em condições delimitadas, nem sempre a técnica de programação linear é capaz de reproduzir por completo a realidade e suas nuances. Problemas inesperados, como greve ou pacotes econômicos; variáveis que mudam com demasiada freqüência, como preço de commodities; excesso de restrições tornando o problema por demais complexo, e outras situações do gênero limitam o uso dessa ferramenta gerencial.

O mercado de trabalho vem se tornando mais exigente em relação ao nível educacional das pessoas e os empregos menos garantidos. Pessoas com muitos anos numa empresa podem ser (e tem sido) substituídas por outras mais jovens e *melhor instruídas.* Se pudermos inferir uma tendência através do conteúdo de revistas internacionais de contabilidade nos últimos dez anos, melhor educação significa *conhecimento mais amplo de matemática e suas aplicações práticas.*

O uso de programação linear para problemas de otimização de lucro é comprovado há 40 anos. Os softwares de computador vieram a facilitar muito a tarefa de solucionar essa classe de problemas, permitindo que profissionais com limitado conhecimento de álgebra possam fazer uso desse instrumento.

Vale a pena tentar !

* Prof. Assistente da UERJ
Prof. Adjunto da EPGE/FGV
Cursando Doutorado em Ciências
Contábeis pela FEA/USP
Março de 1995

BIBLIOGRAFIA

1. HOWELL, James E. e TEICHROEW, Daniel; "*Mathematical Analysis for Business Decisions*"; Irwin, 1971; Pag. 314.
2. KAPLAN, R.S. & ATKINSON, A..A.; "*Advanced Management Accounting*"; Prentice-Hall, 1989; Cap.14, 15
3. RAPPAPORT, Alfred.; "*Information for Decision Making*"; Prentice-Hall, 1982
4. HELMKAMP, John G.; "*Managerial Accounting*"; John Wiley & Sons, 1990; Cap. 15
5. ONSI, M; "*Transfer Pricing System based on opportunity cost*"; The Accounting Review, 45; Jul. 1970; Pag. 535 / 43.