

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE TÍTULOS PÚBLICOS****BOND PORTFOLIO OPTIMIZATION**

João Frois Caldeira\* E-mail: [joao.caldeira@ufrgs.br](mailto:joao.caldeira@ufrgs.br)  
Guilherme Valle Moura\*\* E-mail: [guilherme.moura@ufsc.br](mailto:guilherme.moura@ufsc.br)  
André Alves Portela Santos\*\* E-mail: [andre.portela@ufsc.br](mailto:andre.portela@ufsc.br)

\*Universidade Federal do Rio Grande do Sul

\*\*Universidade Federal de Santa Catarina

**Resumo:** Este trabalho utiliza a abordagem de Markowitz para otimizar carteiras de títulos públicos brasileiros. Com este fim, modelos fatoriais são usados para prever a curva de juros. Além disso, esta representação fatorial é explorada para modelar de forma parcimoniosa a matriz de covariância condicional das diversas maturidades, permitindo obter estimativas não só para os retornos esperados, mas também para a matriz de covariância destes. Estas estimativas são então utilizadas para obter carteiras ótimas de média-variância e mínima variância para títulos públicos. Uma aplicação empírica envolvendo um conjunto de dados inéditos contendo títulos públicos brasileiros com diferentes maturidades indica que as carteiras otimizadas possuem um desempenho ajustado ao risco superior ao obtido pelo.

**Palavras-chave:** Otimização de carteira. Estrutura a termo da taxa de juros. Dynamic conditional correlation (DCC). Avaliação de performance previsão.

**Abstract:** In this paper we optimize portfolios containing Brazilian government bonds. We use factor models to fit and forecast the yield curve. Additionally, we explore the factor structure of the yield curve to parsimoniously model and forecast the conditional covariance matrix of the yields. These forecasts are then used as inputs to obtain mean-variance and minimum variance optimal bond portfolios. An empirical examination involving a novel data set of Brazilian government bonds with different maturities indicates that the optimized bond portfolios deliver an improved risk-adjusted performance in comparison to the benchmark.

**Keywords:** Government bonds. Portfolios. Forecast.

## 1 INTRODUÇÃO

Até recentemente, a análise de ativos de renda fixa em todo o mundo era tratada de forma simples. Em um ambiente econômico caracterizado por taxas de juros relativamente estáveis, grande parte dos investidores carregavam suas posições em títulos até a maturidade destes. Neste contexto, a medida de *yield-to-maturity*

funcionava como uma boa *proxy* para o valor relativo do título, bem como para seu retorno efetivo. O risco costumava ser medido simplesmente em termos de risco de *default*. Entretanto, o ambiente econômico-financeiro das últimas décadas apresenta maior volatilidade nas taxas de juros, mudanças mais freqüentes na forma da curva de juros e mudanças na própria volatilidade das taxas de juros ao longo do tempo (ver, por exemplo, PUHLE, 2008).

Com isso, a partir dos anos 80, operações com títulos de renda fixa onde o objetivo é obter rentabilidade a partir das flutuações nas taxas de juros se tornaram mais populares. Usualmente, nessas operações os títulos são vendidos antes de sua maturidade. Neste cenário, medidas como *yield-to-maturity* são de pouca valia uma vez que, como os títulos não serão carregados até a maturidade, outra medida de risco que reflita a volatilidade do preço dos títulos à medida que as taxas de juros se modificam se faz necessária (FABOZZI, 2006).

Neste sentido, a modificação no comportamento das taxas de juros vem tornando o mercado de ativos de renda fixa similar ao mercado de renda variável em alguns aspectos. Entretanto, a literatura aponta poucas referências propondo a utilização da abordagem de média-variância para a seleção de carteiras de renda fixa. Na prática, carteiras de renda fixa costumam ser selecionadas de forma a aproximar a *duration* de algum índice de referência ou então replicar o desempenho deste índice em termos de retorno e volatilidade (FABOZZI; FONG, 1994).

A abordagem de otimização de carteiras desenvolvida por Markowitz (1952), um dos marcos da teoria de finanças moderna, é hoje amplamente usada para auxiliar gestores na construção de carteiras e no desenvolvimento de alocações quantitativas (CORNUEJOLS; TUTUNCU, 2007). No entanto, estas aplicações se restringem, na grande maioria das vezes, à construção de carteiras contendo apenas ativos de renda variável.

Fabozzi e Fong (1994) argumentam que, caso fosse possível computar uma matriz de covariância relacionando vários títulos, o processo de otimização de carteiras de renda fixa poderia ser similar ao utilizado para a otimização de carteiras de ações. Porém, títulos de renda fixa têm maturidades finitas e prometem o pagamento de seu valor de face no vencimento. Com isso, ao final deste ano, o preço de um título com

maturidade de dois anos é uma variável aleatória. Porém, o preço desse mesmo título em dois anos é uma quantidade determinística (desconsiderando o risco de *default*) dada pelo seu valor de face. Isso implica que as propriedades estatísticas do preço e do retorno de um título de renda fixa dependem de sua maturidade. Portanto, tanto preço quanto retorno de títulos são processos não-ergódicos. Logo, técnicas estatísticas tradicionais não podem ser usadas para modelar diretamente o retorno esperado e a volatilidade destes (MEUCCI, 2009, pg. 110), que são os ingredientes fundamentais para a solução do problema de otimização de média-variância.

Neste artigo, uma nova abordagem para obter estimativas para o vetor de retornos esperados e para a matriz de covariâncias dos retornos dos títulos públicos proposta recentemente por Caldeira et al. (2012) é utilizada para a seleção de uma carteira de títulos públicos pré-fixados. Estas estimativas são utilizadas como ingredientes do problema de otimização de média-variância para carteiras de renda fixa. A abordagem proposta toma como base modelos fatoriais dinâmicos e heterocedásticos, introduzida por Santos e Moura (2012), para a estrutura a termo da taxa de juros.

Modelos fatoriais dinâmicos para a estrutura a termo vêm sendo utilizados com sucesso quando aplicados à previsão e ajuste da curva de juros, como, por exemplo, a versão dinâmica do modelo de Nelson e Siegel (1987) proposta por Diebold e Li (2006) e o modelo fatorial proposto por Svensson (1994)<sup>1</sup>. Além disso, diferentemente das abordagens de Korn e Koziol (2006) e Puhle (2008), no presente artigo a presença de heterocedasticidade condicional nas taxas de juros e nos fatores que as descrevem são levadas em conta. Para isso, utiliza-se uma especificação GARCH multivariada parcimoniosa que permite a estimação e previsão de matrizes de covariâncias condicionais para problemas de alta dimensão.

Wilhelm (1992), Korn e Koziol (2006) e Puhle (2008), propõem a utilização do paradigma média-variância para seleção de carteiras de renda fixa utilizando o modelo de Vasicek (1977) para a estrutura a termo. Entretanto, apesar de permitir a derivação de expressões em forma fechada para retornos e covariâncias dos títulos de renda fixa,

---

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, De Pooter (2007), Almeida et al. (2008) e Caldeira et al. (2010b) para uma análise do desempenho preditivo dos modelos fatoriais para a estrutura a termo.

o modelo de Vasicek, não produz bom ajuste e nem boas previsões para os *yields* (ver, por exemplo, Duffee, 2002). A abordagem utilizada aqui, por outro lado, está baseada em modelos fatoriais dinâmicos que, além de permitir a derivação dos momentos dos retornos dos títulos de renda fixa, são amplamente usados para ajuste e previsão da curva de juros (ver, por exemplo, ANBIMA, 2009; BIS, 2005).

Uma aplicação empírica envolvendo uma base de dados inédita contendo taxas de juros nominais de títulos públicos brasileiros é utilizada para exemplificar a relevância e a aplicabilidade da abordagem proposta. Mais especificamente, as maturidades usadas são 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 26, 30, 36, 42 e 48 meses tomando como base preços dos títulos LTN e NTN-F emitidos pelo Tesouro Nacional. Com base nos estimadores para o vetor de retornos esperados e para a matriz de covariância dos retornos dos títulos propostos no artigo, carteiras ótimas de média-variância e mínima variância são construídas e seus desempenhos fora da amostra são comparados em relação a vários índices de referência para o mercado de renda fixa brasileiro. Os resultados indicam que a abordagem proposta no artigo gera carteiras ótimas de média-variância e mínima variância com desempenho ajustado ao risco superior ao obtido pelo *benchmark*. Além disso, os resultados mostram-se robustos quanto a i) especificação econométrica utilizada para modelar a estrutura a termo, ii) especificação econométrica para a dinâmica dos fatores, iii) especificação econométrica para a matriz de covariâncias dos retornos e iv) frequência de rebalanceamento das carteiras otimizadas.

O artigo está organizado da seguinte forma. A seção 2 descreve os modelos fatoriais utilizados para modelar a estrutura a termo, bem como a especificação econométrica para a heterocedasticidade condicional dos fatores. A seção 3 discute um procedimento de estimação em multi-etapas para o modelo proposto. A seção 5 discute a otimização de média-variância para carteira de renda fixa, além de trazer uma aplicação empírica. Finalmente, a seção 6 traz as considerações finais.

## 2 OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE RENDA FIXA UTILIZANDO MODELOS PARA A ESTRUTURA A TERMO

Nesta seção propõe-se o uso de modelos fatoriais para estrutura a termo amplamente usados tanto na comunidade acadêmica, quanto por participantes do mercado<sup>2</sup> para otimização de carteiras de títulos públicos de acordo com a abordagem de média-variância proposta por Markowitz (1952). Modelos fatoriais para a estrutura a termo da taxa de juros permitem encontrar fórmulas fechadas para os *yields* esperados, bem como para a matriz de covariância destes. A partir destes momentos, mostra-se como é possível calcular a distribuição dos preços e dos retornos dos títulos públicos, a qual será posteriormente utilizada como ingrediente indispensável para a otimização de carteiras. A seguir descrevemos os modelos usados para fazer previsão da curva de juros considerados. Os modelos incluem a versão dinâmica do modelo de [37] proposta por [17] e o modelo de [44].

### 2.1 Versão dinâmica do modelo de Nelson-Siegel

Diebold e Li (2006) propuseram uma versão dinâmica do modelo de Nelson & Siegel (1987) e alcançam bons resultados em termos de previsão da curva de juros para fora da amostra. O ponto de partida é a seguinte interpolação da curva de juros:

$$y_t(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (1)$$

onde  $f = (\beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ e } \lambda)$  são os parâmetros. Diebold e Li (2006) interpretam a equação (1) de uma forma dinâmica como um modelo de fatores latentes em que  $(\beta_1, \beta_2 \text{ e } \beta_3)$  são fatores relacionados ao nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo variantes no tempo, que são multiplicados por suas respectivas cargas:

---

<sup>2</sup> Ver BIS (2005) e ANBIMA (2009) para uma discussão acerca da utilização de modelos fatoriais para a curva de juros por Bancos Centrais e instituições financeiras.

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (2)$$

O vetor de taxas de juros observadas,  $y$  pode ser usado para estimar o coeficiente  $f = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  em cada ponto do tempo através de OLS. Repetindo a regressão de OLS em cada ponto do tempo para o vetor de taxas de juros obtém-se séries de tempo dos três fatores estimados.

## 2.2 Modelo de Svensson

Vários autores propuseram extensões do modelo de Nelson-Siegel buscando aumentar sua flexibilidade. Por exemplo, Svensson (1994) inclui um outro termo exponencial, similar ao terceiro, mas com parâmetro de decaimento diferente. O modelo dinâmico de quatro fatores de Svensson é dado por:

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1\tau}}{\lambda_1\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1\tau}}{\lambda_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau} \right) + \beta_{4t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2\tau}}{\lambda_2\tau} - e^{-\lambda_2\tau} \right). \quad (3)$$

O quarto componente pode ser interpretado como uma quarta curvatura. O modelo de Svensson-Nelson-Siegel ajusta melhor a curvas de juros que apresentam mais de um máximo ou mínimo local ao longo do espectro de maturidades.

As diferentes especificações do modelo de Nelson-Siegel consideradas são todas aninhadas e podem, portanto, ser capturadas por uma formulação geral com as seguintes equações:

$$y_t = \Lambda(\lambda) f_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t : \text{NID}(0, \Sigma_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (4)$$

e

$$f_t = \mu + \Upsilon f_{t-1} + R \eta_t, \quad \eta_t : \text{NID}(0, \Omega_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (5)$$

onde  $\Lambda(\lambda)$  é a matriz  $N \times K$  de pesos dos fatores,  $f_t$  é um processo estocástico com dimensão  $K \times 1$  e  $\Sigma_t$  é a matriz  $N \times N$  de covariâncias condicionais dos resíduos do modelo fatorial. Por hipótese, assumimos que  $\Sigma_t$  é uma matriz diagonal. Isto significa que a covariância entre as taxas de juros de diferentes maturidades depende apenas do vetor de fatores latentes  $f_t$ .  $\mu$  é um vetor  $K \times 1$  de constantes,  $\Upsilon$  é a matriz  $K \times K$

de transição,  $R$  é uma matriz de seleção que possibilita inclusão de estados singulares e  $\Omega_t$  é a matriz de covariâncias condicionais dos resíduos,  $\eta_t$ , da equação de transição, os quais são independentes dos resíduos  $\varepsilon_t \forall t$ .

### 2.3 Variância condicional de modelos fatoriais para estrutura a termo

Apesar de existir uma extensa literatura tratando da modelagem e previsão da estrutura a termo<sup>3</sup>, apenas recentemente tem sido levado em conta a presença de heterocedasticidade condicional na estrutura a termo da curva de juros (ver, por exemplo, Caldeira et al. (2010a), dentre outros). Na maioria dos casos, os modelos adotam o pressuposto de volatilidade constante nas taxas de juros, o que gera implicações práticas importantes sobre políticas de gerenciamento de risco. Por exemplo, operações de *hedge* e arbitragem de taxas de juros podem ser influenciadas pela presença de volatilidade variante no tempo, já que nestas operações é necessário incorporar compensações para o risco das taxas de juros. Outra implicação importante é que a presença de volatilidade condicional faz com que os intervalos de confiança dos ajustes e previsões derivadas destes modelos sejam calculados de forma incorreta em amostras finitas.

Neste artigo, os efeitos da volatilidade variante no tempo são incorporados utilizando modelos GARCH multivariados do tipo proposto por Santos e Moura (2012). Para modelar  $\Omega_t$ , a matriz de covariância condicional dos fatores em (5), podem ser consideradas especificações alternativas, incluindo não apenas modelos GARCH multivariados como também modelos de volatilidade estocástica multivariada (Chib et al., 2009). Neste trabalho, considera-se o modelo de correlação condicional dinâmica (*dynamic conditional correlation* - DCC) proposto por Engle (2002), o qual é dado por:

$$\Omega_t = D_t \Psi_t D_t \quad (6)$$

onde  $D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{f_{1t}}}, \dots, \sqrt{h_{f_{kt}}})$ ,  $h_{f_{kt}}$  é a variância condicional do  $k$ -ésimo fator, e  $\Psi_t$  é uma matriz de correlação simétrica e positiva definida com elementos  $\rho_{ij,t}$ , onde

<sup>3</sup> Veja, por exemplo, Filipovic (2009) para uma revisão sobre modelagem de taxas de juros.

$\rho_{ii,t} = 1, i, j = 1, \dots, K$ . No modelo DCC a correlação condicional  $\rho_{ij,t}$  é dada por:

$$\rho_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}} \quad (7)$$

onde  $q_{ij,t}, i, j = 1, \dots, K$ , são colocados na matriz  $Q_t$  de dimensão  $K \times K$ , a qual segue uma dinâmica autoregressiva do tipo GARCH,

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} + \alpha z_{t-1} z_{t-1}' + \beta Q_{t-1} \quad (8)$$

onde  $z_{f_t} = (z_{f_{1t}}, \dots, z_{f_{kt}})$  é o vetor de retorno normalizado dos fatores, cujos elementos são  $z_{f_{it}} = f_{it} / \sqrt{h_{f_{it}}}$ ,  $\bar{Q}$  é a matriz de covariância incondicional de  $z_t$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros escalares não negativos satisfazendo  $\alpha + \beta < 1$ .

Para modelar a volatilidade condicional dos resíduos  $\varepsilon_t$  do modelo fatorial em (4), assume-se que a matriz  $\Sigma_t$  é diagonal, ou seja,  $\Sigma_t = \text{diag}(h_{t\varepsilon_1} \dots h_{t\varepsilon_N})$ , onde  $h_{t\varepsilon_i}$  é a variância condicional dos resíduos da  $i$ -ésima maturidade. Além disso, um procedimento semelhante ao adotado em [11] é utilizado e especificações alternativas do tipo GARCH univariados são usadas para modelar  $h_{t\varepsilon_i}$ . Em particular, considera-se o modelo GARCH de Bollerslev (1986), o modelo GJR-GARCH assimétrico de Glosten et al. (1993), o modelo exponencial GARCH (EGARCH) de Nelson (1991), o modelo threshold GARCH (TGARCH) de Zakoian (1994), o modelo GARCH expoente assimétrico (APARCH) de Ding et al. (1993), modelo GARCH assimétrico (AGARCH) de Engle (1990), e modelo não-linear assimétrico GARCH (NAGARCH) de Engle & Ng (1993). Em todos os modelos, a forma mais simples é adotada, na qual a variância condicional depende apenas de uma defasagem dos retornos passados e variâncias condicionais defasadas. O Apêndice 1 apresenta as especificações de cada um destes modelos. O mesmo procedimento é aplicado para a escolha da especificação do tipo GARCH para a variância condicional dos fatores em (6). Em todos os casos, a escolha da especificação utilizada é feita com base no critério de informação de Akaike (AIC).

## 2.4 Mapeando os momentos dos *yields* para os momentos dos retornos

A abordagem de Markowitz para otimização de carteiras requer estimativas para o retorno esperado de cada título, bem como para a matriz de covariância destes retornos. Entretanto, os modelos fatoriais para a estrutura a termo da taxa de juros apresentados anteriormente modelam somente os *yields*. Porém, é possível obter expressões para o retorno esperado e para a matriz de covariância destes retornos baseado na distribuição dos *yields* esperados. A seguinte proposição, provada em Caldeira et al. (2012), define esta distribuição.

**Proposição 1.** *Dado o sistema formado pelas equações (4) e (5), a distribuição dos yields esperados  $y_t | y_{t-1}$  é  $N(\mu_{y_t}, \Sigma_{y_t})$ , com  $\mu_t = \Lambda(\lambda)f_{t|t-1}$  e  $\Sigma_{y_t} = \Lambda\Omega_{t|t-1}\Lambda' + \Sigma_{t|t-1}$ , onde  $f_{t|t-1}$  é a previsão um passo a frente dos fatores e  $\Sigma_{t|t-1}$  e  $\Omega_{t|t-1}$  são as previsões um passo a frente das matrizes de covariâncias em (4) e (5), respectivamente.*

Com base nas fórmulas fechadas para a matriz de covariâncias e para a média dos *yields* esperados definidas na Proposição 1, pode-se então encontrar a distribuição dos preços esperados. Usando juros compostos contínuos e assumindo que os títulos tenham valor de face igual a 1 no vencimento, obtém-se o vetor de preços esperados  $P_{t|t-1}$ :

$$P_{t|t-1} = \exp(-\tau \otimes y_t), \quad (9)$$

onde  $\otimes$  é a multiplicação elemento por elemento e  $\tau$  é o vetor de maturidades. Como  $y_t | y_{t-1}$  tem distribuição normal,  $P_t | y_{t-1}$  tem distribuição log-normal com média

$$\mu_{p_t} = \exp\left\{\left[-\tau \otimes \mu_{y_t} + \frac{\tau^2}{2} \otimes \text{diag}(\Sigma_{y_t})\right]\right\}, \quad (10)$$

onde  $\text{diag}(\Sigma_{y_t})$  é um vetor contendo os elementos da diagonal principal de  $\Sigma_{y_t}$ . Por sua vez, a matriz de covariância dos preços esperados,  $\Sigma_{p_t}$ , tem elementos dados por:

$$\sigma_{p_t}^{2^{i,j}} = \exp \left\{ \left[ -\tau^i \mu_{y_t}^i - \tau^j \mu_{y_t}^j + 0.5 \left( \tau^{i^2} \sigma_{y_t}^{2^{i,i}} + \tau^{j^2} \sigma_{y_t}^{2^{j,j}} \right) \right] \right\} \cdot \left[ \exp \left( \tau^i \tau^j \sigma_{y_t}^{2^{i,j}} \right) - 1 \right] \quad (11)$$

Usando a fórmula para o log-retornos, é possível encontrar uma expressão em forma fechada para o vetor de retornos esperados dos títulos bem como para a matriz de covariâncias condicionais dos retornos. A Proposição 2 define estas expressões.

**Proposição 2.** *Dado o sistema (4) - (5) e a Proposição 1, o vetor de retornos esperados,  $\mu_{r_{t|t-1}}$ , e a matriz de covariâncias dos retornos (positiva-definida  $\forall t$ ),  $\Sigma_{r_{t|t-1}}$  são dados por:*<sup>4</sup>

$$\mu_{r_{t|t-1}} = -\tau \otimes \mu_t + \tau \otimes y_{t-1}, \quad (12)$$

$$\Sigma_{r_{t|t-1}} = \tau' \tau \otimes \left[ \underbrace{\Lambda \Omega_{t|t-1} \Lambda' + \Sigma_{t|t-1}}_{\Sigma_{y_t}} \right]. \quad (13)$$

Os resultados da Proposição 2 mostram que, a partir de um modelo fatorial para os *yields* como, por exemplo, os modelos de curva de juros propostos por Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994), é possível obter expressões em forma fechada para os retornos esperados e para a matriz de covariâncias condicionais destes. Estes dois estimadores são ingredientes fundamentais para o problema da seleção de carteiras com base no paradigma de média-variância proposto por Markowitz, conforme discutido na seção 5.

Como apontado por Litterman e Scheinkman (1991), o retorno de títulos zero cupom pode ser decompostos em duas partes. A primeira parte é resultado da capitalização recebida devido ao envelhecimento do título; e a segunda parte é atribuída à mudança no preço dos títulos zero cupom com maturidades fixas. Além disso, Litterman e Scheinkman (1991) lembram que a primeira parte é determinística, enquanto a segunda parte está sujeita a incerteza relativa à mudança nos preços. Claramente, só a segunda parte interessa para a otimização de portfólios e é justamente esta parte que é considerada em Korn e Koziol (2006) e Puhle (2008).

<sup>4</sup> Ambas as proposições foram demonstradas em Caldeira et al. (2012)..

Entretanto, para efeito de comparação com outros *benchmarks* é necessário o cálculo também da parte determinística do retorno. O retorno total será dado pela renda gerada pela capitalização à taxa de juros do título, mais a apreciação do capital dada pela variação de preço dos títulos com maturidades fixas. Seguindo Goeij e Marquering (2006), o retorno total de um título com maturidade fixa  $\tau$  entre o período  $t$  e  $t+p$  é dado por:

$$R_{t,t+p}(\tau) = \frac{P_t}{P_{t-p}} - 1 + \frac{p}{252} y_{t-p} = \exp(r_{t,t+p}) - 1 + \frac{p}{252} y_{t-p}, \quad (14)$$

onde  $p$  é dado em dias úteis e  $r_{t,t+p}$  é a parte do retorno gerada pela variação de preço do título com maturidade fixa após  $p$  dias.<sup>5</sup>

### 3 PROCEDIMENTO DE ESTIMAÇÃO

Nesta seção, um procedimento de estimação dos parâmetros do modelo fatorial para os *yields*, bem como para os parâmetros dos modelos de volatilidade é apresentado. A estimação é conduzida em um procedimento de multi-etapas, onde primeiramente são estimados os parâmetros do modelo fatorial e, em seguida, a partir dos resíduos do modelo fatorial, são estimados os parâmetros dos modelos de volatilidade.

#### 3.1 Estimação dos modelos fatoriais dinâmicos para a estrutura a termo das taxas de juros

A abordagem mais direta e amplamente usada para estimação dos fatores e parâmetros do sistema em (4) e (5) consiste em um procedimento de duas etapas (Diebold e Li, 2006). Na primeira etapa, a equação de medida é tratada como um modelo *cross section* e os fatores são estimados por OLS em cada ponto do tempo. Dadas as séries de fatores estimados, o segundo passo consiste de modelar a

---

<sup>5</sup> Ver [10] para mais detalhes a respeito do cálculo de  $R_{t,t+p}$ .

dinâmica dos fatores em (5) conjuntamente através de um VAR(1), ou através de modelos AR(1) individuais. Para simplificar o procedimento de estimação, Diebold e Li (2006) sugerem reduzir o vetor de parâmetros a ser estimado definindo um valor *a priori* para  $\lambda_t$ , o qual é mantido fixo, ao invés de ser tratado como um parâmetro desconhecido.

Os parâmetros de decaimento são estimados através da minimização da soma do quadrados dos erros do modelo ajustado. Isto é, para um dado conjunto de parâmetros calcula-se as taxas de juros implícitas do modelo  $y_t(\tau) = \Lambda(\lambda)f_t$  e então a soma:

$$Z = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (\hat{y}_t(\tau_i) - y_t(\tau_i))^2$$

é minimizada com relação a  $\hat{\lambda}_1$  e  $\hat{\lambda}_2$ . Mais especificamente,  $\hat{\lambda}$  é escolhido de forma a minimizar a diferença entre as taxas de juros ajustadas  $\hat{y}_t$  e as taxas de juros observadas,  $y_t$ . Embora seja provavelmente menos eficiente que a estimação de todos os parâmetros do modelo em uma única etapa por máxima verossimilhança, a abordagem de dois passos tem a clara vantagem de ser mais rápida, sendo assim mais adequada para o exercício de previsões recursivas fora da mostra implementado neste artigo.

### 3.2 Estimação da matriz de covariância dos *yields*

Para obter a matriz de covariância condicional dos fatores,  $\Omega_{t|t-1}$ , uma especificação DCC em (6) será usada. A estimação do modelo DCC pode ser convenientemente dividida em uma parte da volatilidade e outra parte da correlação. A parte da volatilidade refere-se à estimação das volatilidades condicionais univariadas dos fatores através de uma especificação do tipo GARCH. Os parâmetros dos modelos de volatilidade univariados são estimados por quase máxima verossimilhança (QML) assumindo inovações Gaussianas.<sup>6</sup> A parte da correlação refere-se a estimação da

<sup>6</sup> Uma revisão das questões relacionadas à estimação, tais como, escolha dos valores iniciais, algoritmos numéricos, acurácia, bem como

matriz de correlação condicional em (7) e (8). Para estimar os parâmetros da parte da correlação, emprega-se o método CL proposto por Engle et al. (2008). Como destacaram Engle et al. (2008), o estimador CL oferece estimativas mais acuradas dos parâmetros estimados em comparação com procedimento de dois passos proposto por Engle e Sheppard (2001) e Sheppard (2003), especialmente em problemas de grande dimensão.

#### **4 BASE DE DADOS E SUA CONSTRUÇÃO**

A grande maioria dos trabalhos empíricos sobre curva de juros brasileira utiliza dados sobre contratos de DI futuro em suas análises (ver Almeida e Vicente, 2009; Caldeira et al., 2010a, 2012, entre outros). Isso se dá devido a uma especificidade do mercado brasileiro de renda fixa, onde o mercado de futuro apresenta maior liquidez do que o mercado à vista. Entretanto, as carteiras de renda fixa de fundos de investimento, fundos de pensão e outros participantes de mercado são formadas por títulos públicos, enquanto contratos de DI futuro são usados para realizar diferentes tipos de *hedge*.

Como o interesse do presente estudo é a seleção ótima de carteiras de renda fixa, a base de dados utilizada contém diversas maturidades de diferentes títulos públicos pré-fixados. Mais especificamente, a base de dados consiste das séries diárias de taxas de juros nominais de títulos públicos federais pré-fixados, para o período de Janeiro de 2005 a Fevereiro de 2011 ( $T = 1.532$  observações), obtidos da ANBIMA - Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais. As primeiras 500 observações (Jan./2005 a Dez./2006) são usadas para estimação inicial dos parâmetros de todos os modelos segundo os procedimentos discutidos na Seção 3, posteriormente, a cada nova observação os parâmetros são reestimados recursivamente. As últimas 1032 observações (Jan./2007 a Dez./2011) são usadas para análise do desempenho fora-da-amostra. Para a estimação da curva nominal foram usados os preços indicativos dos títulos LTN e NTN-F emitidos pelo Tesouro Nacional

---

propriedades assintóticas são dadas por Berkes et al. (2003), Robinson e Zaffaroni (2006), Francq e Zakoian (2009), e Zivot (2009). É importante observar que mesmo quando a suposição de normalidade é inapropriada, o estimador QML baseado na maximização das verossimilhanças Gaussianas é consistente e assintoticamente Normal, dado que a média condicional e funções de variância do modelo GARCH são corretamente especificadas; ver Bollerslev e Wooldridge (1992)..

para todos os vencimentos disponíveis. Ambos são títulos prefixados, porém as LTNs são títulos zero cupom ao passo que as NTN-Fs pagam cupons semestrais.

Mais especificamente, as LTNs são os títulos de mais simples precificação no mercado doméstico, visto que não pagam cupom de juros e apresentam um único fluxo de principal na data de vencimento do título. Adicionalmente, é importante mencionar que o valor unitário nominal de principal a ser pago será sempre de R\$ 1.000,00, independentemente da data de emissão ou de resgate do título. As LTNs são bônus de cupom zero (*zero coupon bonds*):

$$PU = \frac{VN}{(1+y)^\tau}, \quad y = \left( \frac{VN}{PU} \right)^\tau$$

onde  $PU$  é o preço unitário,  $VN$  é o valor nominal,  $\tau$  tempo até o vencimento (em anos comerciais - 252 dias úteis) e  $y$  é o yield do título (anualizado).

Já as NTN-Fs são títulos prefixados que pagam cupons de juros (10% a.a.) semestrais, compostos, e apresentam um único fluxo de principal na data de vencimento. Assim como as LTNs, no vencimento o principal pago será sempre de R\$ 1.000,00. Seu preço unitário é calculado como:

$$PU = \sum_{t=1}^n \left[ \frac{C_t}{(1+y)^\tau} \right] + \frac{VN}{(1+y)^\tau}, \quad C_t = \left[ (1+10\%)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \times VN.$$

Inicialmente os títulos com cupom (NTN-F de diversas maturidades) são transformados em zero cupom através do cálculo da *duration* dos mesmos. Uma vez que trabalhamos com maturidades fixas, os dados observados foram interpolados através do método *cubic splines* proposto originalmente por [36].<sup>7</sup> Em seguida, define-se o total de pagamentos dos títulos ( $D$ ) em  $t$  é como:

$$D_t(\tau) = PR_t(\tau) + C_t(\tau)$$

onde  $PR$  é o pagamento do principal e  $C$  o somatório do pagamento dos cupons do título considerado. A partir de  $D_t(\tau)$  obtém-se a *duration* e a maturidade de cada título. A Tabela 0 resume algumas estatísticas descritivas da curva de juros para o período. Alguns fatos estilizados comuns a dados de curvas de juros estão claramente

<sup>7</sup> Para mais detalhes e aplicações deste método, ver Hagan e West (2006) e Hayden e Ferstl (2010).

presentes. Primeiro, a curva média da amostra é positivamente inclinada e côncava. Segundo, a volatilidade é decrescente com a maturidade e as autocorrelações são altas. Outro ponto a destacar é que mesmo se tratando de um período amostral não muito longo percebe-se ampla variação entre as taxas mínimas e máximas para todas as maturidades, refletindo mais diretamente o comportamento da política monetária no período. As últimas colunas trazem as autocorrelações com defasagens de 1 e 21 dias úteis e autocorrelações parciais com defasagens de 2 e 21 dias, observa-se também que as taxas de juros para maturidades mais curtas exibem maior persistência para os três níveis de defasagens analisados.

**Tabela 1** - Estatísticas Descritivas das Curvas de Juros

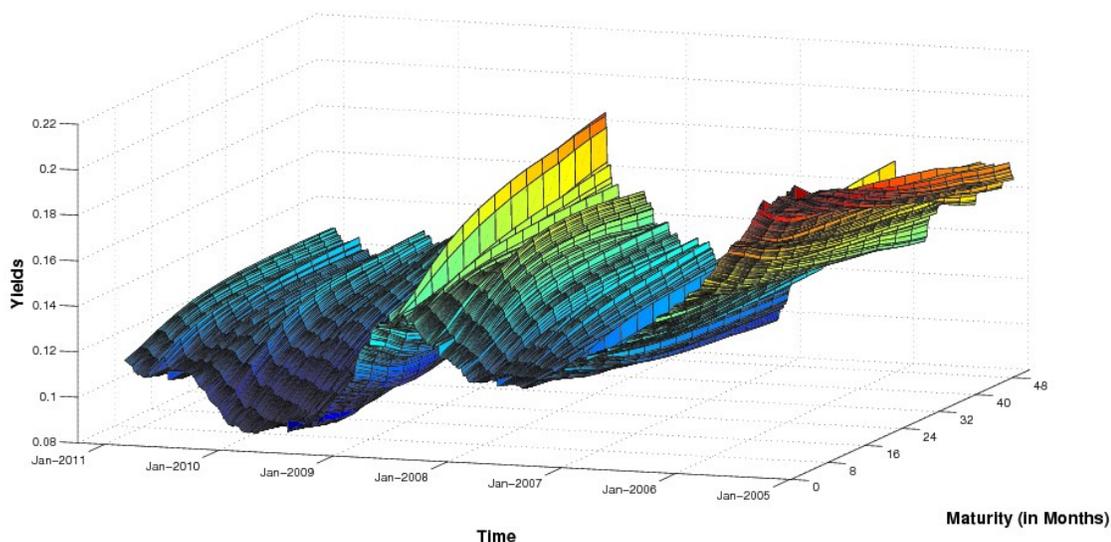
A tabela apresenta estatísticas descritivas da curva de juros de títulos públicos empregada. A amostra consiste de taxas de juros diárias de Janeiro de 2005 a Março de 2011. Os dados diários empregados são contruídos através do método de *cubic-splines*. As maturidades estão expressas em meses. Para cada maturidade são apresentadas a média, desvio padrão, mínimo, máximo e dois coeficientes de (1 dia e 1 mês) autorocorrelações respectivamente) e duas (2 dias e 1 mês) autorocorrelações parciais

		Estatísticas Descritivas						Acf		Pacf	
Maturidades	$\tau$	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(21)$	$\hat{\alpha}(2)$	$\hat{\alpha}(21)$
	1	0.1309	0.0343	0.0845	0.2057	0.732	2.462	0.999	0.976	-0.018	0.018
	3	0.1302	0.0336	0.0854	0.2009	0.729	2.489	0.999	0.972	0.023	-0.020
	6	0.1305	0.0321	0.0861	0.1997	0.741	2.539	0.999	0.966	0.073	-0.073
	9	0.1315	0.0304	0.0882	0.1985	0.744	2.531	0.999	0.962	0.082	-0.060
	12	0.1326	0.0287	0.0914	0.1974	0.736	2.480	0.998	0.958	0.074	-0.043
	15	0.1336	0.0271	0.0951	0.1957	0.722	2.410	0.998	0.953	0.060	-0.033
	18	0.1344	0.0257	0.0983	0.1937	0.707	2.338	0.998	0.948	0.044	-0.028
Meses	21	0.135	0.0245	0.1011	0.1914	0.691	2.271	0.998	0.942	0.026	-0.027
	24	0.1355	0.0234	0.1037	0.1888	0.675	2.214	0.997	0.936	0.008	-0.027
	26	0.1359	0.0224	0.1031	0.1865	0.659	2.171	0.997	0.930	-0.012	-0.028
	30	0.1362	0.0217	0.1024	0.1843	0.642	2.142	0.997	0.924	-0.031	-0.028
	36	0.1366	0.0204	0.1012	0.1832	0.606	2.126	0.996	0.912	-0.068	-0.028
	42	0.1369	0.0196	0.1003	0.1852	0.569	2.154	0.996	0.901	-0.098	-0.026
	48	0.1371	0.0190	0.0996	0.1868	0.535	2.207	0.995	0.891	-0.122	-0.024

A figura 1 mostra o gráfico das séries temporais para o conjunto de maturidades empregadas e ilustra como o nível da curva de juros e o *spread* variam substancialmente ao longo do período amostral. Por exemplo, o último ano da amostra é caracterizado por elevação das taxas de juros, principalmente para as maturidades mais curtas, que respondem mais diretamente à política de elevação de juros implementada pelo Banco Central no primeiro semestre de 2010. Nota-se também que não apenas o nível da curva de juros flutua ao longo do tempo, mas também a inclinação e curvatura. A curvatura assume vários formatos, desde formas suaves a

invertidas, tipo S.

**Figura 1** - Dinâmica da curva de juros ao longo do tempo



## 5 APLICAÇÃO EM OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE RENDA FIXA

Para ilustrar a aplicabilidade dos estimadores de retornos esperados e covariâncias condicionais propostos neste artigo, considera-se o problema de otimização de carteiras de renda fixa no contexto de média-variância (MARKOWITZ, 1952; KORN; KOZIOL, 2006; PUHLE, 2008). A formulação do portfólio de média-variância é dada por

$$\begin{aligned} & \min_{w_t} w_t \Sigma_{r_{t|t-1}} w_t - \frac{1}{\delta} w_t \mu_{r_{t|t-1}} \\ & \text{sujeito a} \\ & w_t \iota = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

onde  $\mu_{r_{t|t-1}}$  é a previsão um passo a frente do vetor de retornos esperados,  $\Sigma_{r_{t|t-1}}$  é a a previsão um passo a frente da matriz de covariâncias condicionais dos retornos,  $w_t$  é o vetor de pesos a ser otimizado,  $\iota$  é um vetor de uns com dimensão  $N \times 1$  e  $\delta$  é o

coeficiente de aversão ao risco.<sup>8</sup> No caso onde vendas a descoberto são restritas, é adicionada à equação (15) uma restrição para evitar pesos negativos, ou seja,  $w_i \geq 0$ . Trabalhos anteriores mostram que adicionar tal restrição pode melhorar substancialmente a performance, principalmente reduzindo o *turnover* do portfólio, ver Jagannathan e Ma (2003), dentre outros.

Uma variação do problema de otimização de média-variância consiste no portfólio ótimo de mínima variância. Nesta formulação, considera-se que indivíduos são altamente avessos ao risco, de tal modo que  $\delta \rightarrow \infty$ . A formulação do portfólio ótimo de mínima variância é dada por

$$\begin{aligned} & \min_{w_i} w_i \Sigma_{r_{i|t-1}} w_i \\ & \text{sujeito a} \\ & w_i \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Como no caso anterior, é adicionada à equação (16) uma restrição para evitar pesos negativos, ou seja,  $w_i \geq 0$ . Em ambos os casos, os pesos ótimos do portfólio de média-variância e do portfólio de mínima variância com restrição para vendas a descoberto são obtidos através de métodos de otimização numérica.

## 5.1 Metodologia para avaliação do desempenho

O desempenho dos portfólios ótimos de média-variância e mínima variância é avaliado em termos de retorno médio ( $\hat{\mu}$ ), excesso de retorno médio em relação à taxa livre de risco<sup>9</sup> ( $\hat{\mu}_{ex}$ ), desvio padrão (volatilidade) dos retornos ( $\hat{\sigma}$ ), índice de Sharpe (IS) e *turnover*. Estas estatísticas são calculadas como segue:

<sup>8</sup> Neste trabalho, seguimos [14] e assumimos que  $\delta = 1$ .

<sup>9</sup> Neste trabalho consideramos que a taxa livre de risco é dada pelo CDI.

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} w_t R_{t+1}; & \hat{\mu}_{ex} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=\tau}^{T-1} (w_t R_{t+1} - CDI_{t+1}) \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (w_t R_{t+1} - \hat{\mu})^2}; & IS &= \frac{\hat{\mu}_{ex}}{\hat{\sigma}} \\ \text{Turnover} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|) \end{aligned}$$

onde  $w_{j,t}$  é o peso do ativo  $j$  no portfólio no período  $t$ , mas antes do rebalanceamento e  $w_{j,t+1}$  é o peso desejado do do ativo  $j$  no período  $t+1$ . O *turnover*, como definido acima, pode ser interpretado como a fração média da riqueza transacionada em cada período.

O *bootstrap* estacionário de Politis e Romano (1994) com  $B=1.000$  reamostragens e tamanho de bloco  $b=5^{10}$  foi usado para testar a significância estatística das diferenças entre as volatilidades e índices de Sharpe dos portfólios ótimos em relação a uma estratégia *benchmark*. Os  $p$ -valores do teste foram obtidos usando a metodologia sugerida em Ledoit e Wolf (2008, Observação 3.2).

## 5.2 Índices *benchmark*

Para o mercado de renda fixa brasileiro, a disponibilidade de índices de mercado compostos por carteiras de títulos é recente. Entretanto, nos últimos anos tem havido um aprimoramento com a divulgação de diversos índices construídos pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA). A utilização destes índices como referência para a indústria de fundos de renda fixa no Brasil vem crescendo significativamente, sendo a sua utilização cada vez mais difundida entre os participantes do mercado. Com o objetivo de atender às necessidades dos diversos tipos de investidores, existe um conjunto de índices que representam a evolução, a preços de mercado, dos títulos públicos de acordo com seus respectivos indexadores. Dentre os índices desenvolvidos, pode-se destacar:

**IRF-M:** Composto por títulos prefixados (NTN-F e LTN) ;

<sup>10</sup> Foram realizados extensivos testes de robustez para definir o tamanho do bloco, usando valores para  $b$  entre 5 e 250. Independente do tamanho do bloco, os resultados dos testes para a variância e índice de Sharpe são similares aos reportados aqui.

**IMA-B:** Composto por títulos pós-fixados indexados ao IPCA (NTN-B);

**IMA-C:** Composto por títulos pós-fixados indexados ao IGP-M (NTN-C) ;

**IMA-S:** Composto por títulos pós-fixados indexados à taxa SELIC (LFT).

Levando-se em conta que a base de dados utilizada é composta por títulos públicos nominais de diversas maturidades (inferiores e superiores a 1 ano), optou-se por utilizar o índice de renda fixa IRF-M amplo como *benchmark*, uma vez que este índice também é composto por títulos de diversas maturidades, tanto inferiores como superiores a 1 ano. Para mais informações sobre este e outros índices de referência, ver ANBIMA (2011).

### 5.3 Resultados

Nesta seção, os resultados dos portfólios ótimos de média-variância e mínima variância aplicados ao conjunto de taxas de juros zero-cupom com maturidades fixas são apresentados. Todos os resultados foram obtidos utilizando-se somente as observações pertencentes ao período fora-da-amostra (Jan./2007 a Dez./2011) com base nos critérios de avaliação de desempenho discutidos na seção 5.1. Para avaliar a robustez dos resultados, foram consideradas várias especificações econométricas para modelar o vetor de retornos esperados e a matriz de covariâncias dos retornos dos ativos de renda fixa. Mais especificamente, consideramos duas especificações para o modelo fatorial (Nelson-Siegel e Svensson) e duas especificações para a dinâmica dos fatores: VAR(1) e AR(1). As matrizes de covariâncias dos retornos foram obtidas utilizando a especificação DCC proposta na seção 2.3.

As composições das carteiras otimizadas são recalculadas (rebalanceadas) com frequência diária. Entretanto, os custos de transação envolvidos nesta frequência de rebalanceamento podem prejudicar o desempenho das carteiras e dificultar sua implementação na prática. Dessa forma, o desempenho das carteiras otimizadas é avaliado também para o caso de rebalanceamento com frequência semanal, mensal e trimestral. Um ponto potencialmente negativo ao adotar uma frequência menor de rebalanceamento é que as composições ótimas podem ficar desatualizadas.

As tabelas 2 e 3 trazem os resultados da avaliação de desempenho das carteiras

ótimas de média-variância e mínima variância, respectivamente. Além disso, a tabela 4 apresenta a avaliação de desempenho dos índices *benchmark*. As estatísticas de retorno médio, excesso de retorno médio, desvio padrão e índice de Sharpe estão anualizadas. Os resultados da tabela 2 mostram que todas as especificações consideradas para o portfólio de média-variância superam o índice de referência IRF-M em termos de retorno médio e excesso de retorno médio em todas as frequências de rebalanceamento, principalmente quando a especificação Nelson-Siegel é usado como modelo fatorial. Por exemplo, a especificação Nelson-Siegel/AR/DCC com frequência de rebalanceamento trimestral gera um retorno médio e um excesso de retorno médio de 19,4% e 8,96%, respectivamente, enquanto que o índice benchmark gera 11,43% e 1,01% para estes indicadores. Entretanto, observamos que o desvio-padrão (risco) das carteiras de média-variância é estatisticamente maior do que o obtido pelo índice de referência quando o modelo fatorial Nelson-Siegel é utilizado, uma vez que o desvio-padrão das carteiras otimizadas varia de 3,5% a 5%, enquanto o desvio padrão do índice de referência é 2,4%. Ao examinar o índice de Sharpe das carteiras otimizadas com base no model fatorial Nelson-Siegel observa-se que apesar do desempenho ajustado ao risco dos portfólios de média-variância ser superior ao obtido pelo índice de referência, essa diferença não é estatisticamente significativa. Por outro lado, quando o modelo fatorial de Svensson é utilizado, o desempenho ajustado ao risco das carteiras otimizadas é estatisticamente superior ao obtido pelo índice de referência ao longo de todas as frequências de rebalancemamento. Observa-se também que, como esperado, o rebalanceamento trimestral gera um *turnover* substancialmente menor em relação ao rebalanceamento diário.

A tabela 3 apresenta os resultados das carteiras obtidas pelo critério de variância mínima. Observa-se que em termos de retorno médio e excesso de retorno médio os resultados obtidos são ligeiramente inferiores aos do índice de referência IRF-M. Entretanto, o desvio padrão das carteiras de mínima variância é substancialmente e estatisticamente menor que o obtido pelo índice de referência. Ao longo de todas as especificações econométricas e ao longo de todas as frequências de rebalanceamento, o desvio padrão das carteiras de mínima variância varia de 0.2% a 0.82%, enquanto o índice de referência apresenta desvio padrão de 2,4%. Como consequência, o retorno

ajustado ao risco das carteiras de mínima variância medido pelo índice de Sharpe é estatisticamente maior que o do índice de referência em todos os casos, pois varia de 1,9 a 4,0 enquanto o índice de Sharpe do IRF-M é 0,41. Semelhante ao obtido com as carteiras de média-variância, observamos que o *turnover* das carteiras de média variância e mínima variância cai substancialmente à medida que a frequência de rebalanceamento das carteiras diminui. Uma análise comparativa do desempenho das carteiras de média-variância e mínima variância sugere que estas últimas geram índices de Sharpe superiores e um desvio padrão substancialmente menor. Dessa forma, os resultados sugerem que, de fato, as carteiras de mínima variância cumprem seu propósito de gerar composições ótimas com menos risco em relação a outras carteiras otimizadas e também em relação ao índice de referência.

**Tabela 2 - Desempenho fora-da-amostra dos portfólios ótimos de média-variância**

A Tabela reporta estatísticas de desempenho para os portfólios ótimos de média-variância utilizando títulos públicos nominais com maturidades constantes de 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 26, 30, 36, 42 e 48 meses. As carteiras ótimas são rebalanceadas com frequência diária, semanal, mensal e trimestral. As estatísticas de retornos, desvio-padrão e índice de Sharpe estão anualizados. O excesso de retorno está calculado utilizando-se o CDI como ativo livre de risco. O asterisco indica que o coeficiente é estatisticamente diferente ao obtido pelo índice *benchmark* IRF-M ao nível de significância de 10%.

Modelo fatorial	Transição dos fatores	Matriz de Covariâncias	Retorno médio (%)	Excesso de retorno médio (%)	Desvio padrão (%)	Índice de Sharpe	Turnover
<i>Rebalanceamento diário</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	19.379	8.958	3.564 *	2.513	0.322
Nelson-Siegel	VAR	DCC	19.996	9.575	3.994 *	2.396	0.346
Svensson	AR	DCC	13.284	2.863	1.362 *	2.101 *	0.194
Svensson	VAR	DCC	13.101	2.679	1.626 *	1.647 *	0.210
<i>Rebalanceamento semanal</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	22.149	11.727	4.513 *	2.598	0.131
Nelson-Siegel	VAR	DCC	22.755	12.333	5.016 *	2.458	0.141
Svensson	AR	DCC	13.766	3.345	1.492 *	2.241 *	0.074
Svensson	VAR	DCC	13.578	3.156	1.826 *	1.728 *	0.081
<i>Rebalanceamento mensal</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	24.252	13.830	9.618 *	1.437	0.048
Nelson-Siegel	VAR	DCC	26.785	16.363	11.48 *	1.425	0.050
Svensson	AR	DCC	13.518	3.097	1.427 *	2.170 *	0.030
Svensson	VAR	DCC	13.479	3.057	1.827 *	1.673 *	0.024
<i>Rebalanceamento trimestral</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	20.585	10.164	3.831 *	2.652	0.022
Nelson-Siegel	VAR	DCC	21.345	10.924	4.006 *	2.726	0.022
Svensson	AR	DCC	12.955	2.533	1.416 *	1.788 *	0.015
Svensson	VAR	DCC	12.102	1.681	1.702 *	0.987 *	0.010

**Tabela 3 - Desempenho fora-da-amostra dos portfólios ótimos de mínima variância**

A Tabela reporta estatísticas de desempenho para os portfólios ótimos de mínima variância utilizando títulos públicos nominais com maturidades constantes de 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 26, 30, 36, 42 e 48 meses. As carteiras ótimas são rebalanceadas com frequência diária, semanal, mensal e trimestral. As estatísticas de retornos, desvio-padrão e índice de Sharpe estão anualizados. O excesso de retorno está calculado utilizando-se o CDI como ativo livre de risco. O asterisco indica que o coeficiente é estatisticamente diferente ao obtido pelo índice *benchmark* IRF-M ao nível de significância de 10%.

Modelo fatorial	Transição dos fatores	Matriz de Covariâncias	Retorno médio (%)	Excesso de retorno médio (%)	Desvio padrão (%)	Índice de Sharpe	Turnover
<i>Rebalanceamento diário</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	11.175	0.753	0.207*	3.635*	0.022
Nelson-Siegel	VAR	DCC	11.195	0.774	0.220*	3.506*	0.022
Svensson	AR	DCC	11.282	0.860	0.242*	3.545*	0.003
Svensson	VAR	DCC	11.204	0.782	0.205*	3.802*	0.001
<i>Rebalanceamento semanal</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	11.156	0.734	0.206*	3.549*	0.009
Nelson-Siegel	VAR	DCC	11.154	0.732	0.209*	3.503*	0.009
Svensson	AR	DCC	11.198	0.777	0.215*	3.602*	0.001
Svensson	VAR	DCC	11.175	0.753	0.200*	3.760*	0.000
<i>Rebalanceamento mensal</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	11.163	0.742	0.206*	3.592*	0.002
Nelson-Siegel	VAR	DCC	11.161	0.740	0.208*	3.544*	0.003
Svensson	AR	DCC	11.450	1.029	0.275*	3.732*	0.001
Svensson	VAR	DCC	11.309	0.888	0.218*	4.056*	0.001
<i>Rebalanceamento trimestral</i>							
Nelson-Siegel	AR	DCC	11.199	0.778	0.215*	3.603*	0.002
Nelson-Siegel	VAR	DCC	11.221	0.799	0.224*	3.568*	0.002
Svensson	AR	DCC	12.024	1.602	0.825*	1.940*	0.001
Svensson	VAR	DCC	11.584	1.162	0.403*	2.880*	0.001

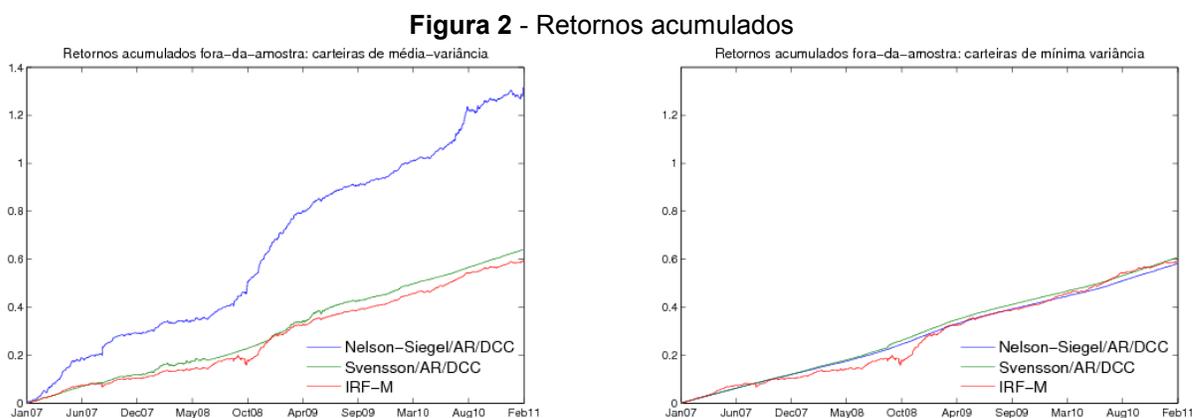
**Tabela 4 - Desempenho das estratégias *benchmark***

A Tabela reporta estatísticas de desempenho para as carteiras utilizadas como *benchmark*. Os índices IRF-M 1, IRF-1+ e IRF-M são formados por títulos públicos pré-fixados, enquanto que os índices IMA-B 5, IMA-B 5+ e IMA-B são formados por títulos pós-fixados. As estatísticas de retornos, desvio-padrão e índice de Sharpe estão anualizados. O excesso de retorno está calculado utilizando-se o CDI como ativo livre de risco.

	Retorno médio (%)	Excesso de retorno médio (%)	Desvio padrão (%)	Índice de Sharpe
IRF-M 1	11.059	0.637	0.449	1.420
IRF-M 1+	11.838	1.416	4.144	0.342
IRF-M	11.432	1.011	2.465	0.410
IMA-B 5	12.904	2.483	2.562	0.969
IMA-B 5+	16.083	5.662	7.817	0.724
IMA-B	13.994	3.573	4.722	0.757

A figura 2 traz os retornos acumulados das carteiras otimizadas por média variância (gráfico superior) e variância mínima (gráfico inferior) baseados nas

especificações Nelson-Siegel/AR/DCC e Svensson/AR/DCC considerando uma frequência de rebalanceamento trimestral, além dos retornos acumulados do índice de referência IRF-M, ao longo do período fora-da-amostra. Nota-se que, no caso das carteiras de média-variância, o diferencial de retorno em relação ao *benchmark* é positivo em todo o período analisado. Além disso, observa-se que o melhor desempenho em termos de retornos acumulados foi obtido utilizando-se o modelo fatorial Nelson-Siegel. Este resultado sugere que este modelo fatorial gera carteiras otimizadas com um padrão risco-retorno diferente daquele obtido com modelo de Svensson, pois alcança um retorno maior e também um risco da carteira mais elevado, conforme observado anteriormente. Para as carteiras de mínima-variância, observa-se que as diferentes especificações obtiveram um desempenho semelhante ao índice de referência em termos de retorno acumulado. Entretanto, a inspeção visual indica que, em ambos os casos, as carteiras de mínima variância possuem uma variabilidade substancialmente inferior ao do índice de referência.



Em resumo, os resultados reportados nas tabelas 2 e 3 indicam que a metodologia proposta para obter carteiras ótimas de média-variância e mínima variância com base nos estimadores propostos para o vetor de retornos esperados e para a matriz de covariâncias dos retornos geram um desempenho fora da amostra superior ao do índice de referência em vários aspectos. Primeiro, os retornos médio, em excesso e acumulado das carteiras de média-variância supera os obtidos pelo índice *benchmark* em todas as especificações consideradas. Segundo, o desvio padrão das carteiras de

mínima variância é substancialmente menor ao obtido pelo índice de referência, de modo que o retorno ajustado ao risco das carteiras otimizadas torna-se estatisticamente superior. Além disso, os resultados mostraram-se robustos quanto a: i) o modelo fatorial utilizado para modelar a curva de juros, ii) a especificação econométrica para a transição dos fatores, e iii) a frequência de rebalanceamento das carteiras.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização do paradigma média-variância introduzido por Markowitz (1952) para otimização de carteiras de ativos de renda variável tem sido amplamente utilizada por participantes do mercado e documentada na literatura acadêmica especializada em seleção de ativos. Entretanto, a utilização desta metodologia para seleção de ativos de renda fixa não recebe a devida atenção na literatura acadêmica e nem entre os gestores. Com o intuito de suprir esta deficiência, o presente artigo adota a abordagem de média-variância para otimização de carteiras de títulos de públicos com base em modelos para estrutura a termo da curva de juros e em desenvolvimentos recentes para previsões da matriz de covariância dos *yields*. Em particular, considera-se a versão dinâmica do modelo fatorial de Nelson e Siegel (1987) proposta por Diebold & Li (2006) e o modelo de quatro fatores de Svensson (1994), aplicadas a uma longa base de dados diários de taxas de juros nominais de títulos públicos brasileiros.

A abordagem utilizada no artigo mostra que os modelos de fatores para a estrutura a termo da curva de juros permitem prever os retornos e covariâncias, simplificando o processo de otimização de carteiras. Os resultados encontrados mostram que as carteiras de renda fixa otimizadas exibem perfis de risco-retorno bastante atrativos. Por exemplo, as carteiras obtidas pelo critério de mínima variância apresentaram índice de Sharpe anualizados entre 1,9 e 4, contra 0,4 do índice de referência IRF-M. Na prática, um investidor arca com custos de transação quando altera a composição de seu portfólio ao longo do tempo e estes custos são determinados em grande medida em função da frequência e magnitude das mudanças no portfólio. Apesar dos custos de transação não serem levados em conta diretamente, calculamos

o *turnover* das carteiras para cada parametrização considerada, o qual mostra haver estabilidade das composições ótimas estimadas, principalmente quando se considera o critério de rebalanceamento trimestral. Por fim, todos os resultados mostraram-se extremamente robustos em relação ao modelo fatorial para a estrutura a termo utilizado, à especificação econométrica para a dinâmica dos fatores e à frequência de rebalanceamento das carteiras otimizadas.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C. ; GOMES, R.; VICENTE, J. A. L. Movimentos da estrutura a termo e critérios de minimização do erro de previsão em um modelo paramétrico exponencial. **Revista Brasileira de Economia**, v.62, n. 4, p.497–510, 2008.
- ANBIMA. **Títulos públicos federais**: critérios de cálculo e metodologia de precificação. Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de *Capitais*, 2009.
- ANBIMA. **Índices de renda fixa IMA**. Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais, 2011.
- BERKES, I.; HORVÁTH, L.; KOKOSZKA, P. GARCH processes: structure and estimation. **Bernoulli**, v. 9, n.2, p.201–227, 2003.
- BIS. **Zero-coupon yield curves**: technical documentation. Technical report, Bank for International Settlements, 2005.
- BOLLERSLEV, T. ; WOOLDRIDGE, J.M. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. **Econometric reviews**, v.11, n. 2, p.143–172, 1992.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v.31, n. 3, p.307–327, 1986.
- CALDEIRA, J. F.; LAURINI, M. P.; PORTUGAL, M.S. Bayesian inference applied to dynamic nelson-siegel model with stochastic volatility. **Brazilian Review of Econometrics**, v.30, n. 1, p.123–161, 2010.
- CALDEIRA, J. F., MOURA, Guilherme V.; PORTUGAL Marcelo S. Efficient yield curve estimation and forecasting in brazil. **Economia**, v.11, n. 1, p. 27–51, 2010.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A.A.P.. **Bond portfolio optimization**: A dynamic heteroskedastic factor model approach. Florianópolis: UFSC, 2012. (Textos para discussão)

- CAPPIELLO, L.; ENGLE, R.F.; SHEPPARD, K. Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial Econometrics*, v.4, n. 4, p.537–572, 2006.
- CHIB, S. ; OMORI, Y.; ASAI, M. **Multivariate stochastic volatility**. Springer Verlag, 2009.
- CORNUEJOLS, G.; TÜTÜNCÜ, R. **Optimization methods in finance**. Cambridge University Press, 2007.
- DEMIGUEL, V.; NOGALES, F.J. Portfolio selection with robust estimation. **Operations Research**, v. 57, n. 3, p. 560–577, 2009.
- GOEIJ, Peter de; MARQUERING, Wessel. Macroeconomic announcements and asymmetric volatility in bond returns. **Journal of Banking & Finance**, v. 30, n. 10, p. 2659–2680, October 2006.
- POOTER, M. de. **Examining the nelson-siegel class of term structure models**. Tinbergen institute discussion papers, Tinbergen Institute, 2007.
- DIEBOLD, F.; LI, C.. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, v.130, n. 2, p. 337–364, February 2006.
- DING, Z.; GRANGER, C.W.J.; ENGLE, R.F.. A long memory property of stock returns and a new model. **Journal of Empirical Finance**, v.1, n. 1, p. 83–106, 1993.
- ENGLE, R.F. ; NG, V.K.. Measuring and testing the impact of news on volatility. **Journal of Finance**, v. 48, n. 5, p.1749–78, 1993.
- ENGLE, R.F.; SHEPHARD, N. ; SHEPPARD, K. Fitting vast dimensional time-varying covariance models. **Discussion Paper Series n.403**. Department of Economics, University of Oxford, 2008.
- ENGLE, R.F.; SHEPPARD, K.. Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. **NBER Working Paper W8554**, 2001.
- ENGLE, R.F.. Stock volatility and the crash of '87: discussion. **The Review of Financial Studies**, v. 3, n. 1, p.103–106, 1990.
- ENGLE, R.. Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. **Journal of Business & Economic Statistics**, v.20, n. 3, p. 339–350, 2002.
- FABOZZI, F.J. ; FONG. G. **Advanced fixed income portfolio management: the state of the art**. Probus, 1994.

Fabozzi, F.J. **fixed income mathematics: analytical and statistical techniques**. McGraw-Hill, 2006.

FILIPOVIC, D.. **Term structure models**. Springer Finance, 2009.

FRANCQ, C.; ZAKOIAN, J.M.. A tour in the asymptotic theory of GARCH estimation. In: ANDERSEN, T.G.; DAVIS, R.A.; KREISS J.P.; MIKOSCH, T. (editors), **handbook of financial time series**. Springer Verlag, 2009.

GLOSTEN, Lawrence; JAGANNATHAN, Ravi; RUNKLE, David. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. **Journal of Finance**, v. 48, p. 1779–1801, 1993.

HAGAN, P.; WEST, G.. Interpolation methods for curve construction. **Applied Mathematical Finance**, v. 13, n. 2, p. 89–129, 2006.

HAYDEN, Josef; FERSTL, Robert. Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc. **Journal of Statistical Software**, v. 36, n. i01, p.1–34, 2010.

JAGANNATHAN, R; MA T.. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. **The Journal of Finance**, v. 58, n. 4, p. 1651–1684, 2003.

KORN, O.; KOZIOL, C.. Bond portfolio optimization. **The Journal of Fixed Income**, v. 15, n. 4, p.48–60, 2006.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. **Journal of Empirical Finance**, v. 15, n. 5, p. 850–859, 2008.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J.. Common factors affecting bond returns. **Journal of Fixed Income**, v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991.

Markowitz, H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MCCULLOCH, J. H.. Measuring the term structure of interest rates. **The Journal of Business**, v. 44, n. 1, p. 19–31, January 1971.

NELSON, C. R. N.; SIEGE, A. F. L. Parsimonious modeling of yield curves. **The Journal of Business**, v. 60, n. 4, p. 473–489, 1987.

NELSON, D.B.. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. **Econometrica**, v. 59, n. 2, p. 347–370, 1991.

POLITIS, D.N.; ROMANO, J.P.. The stationary bootstrap. **Journal of the American Statistical Association**, v. 89, n. 428, p. 1303–1313, 1994.

PUHLE, M.. **Bond portfolio optimization**. Lecture notes in economics and mathematical systems. Springer, 2008.

ROBINSON, P.M.; ZAFFARONI, P. Pseudo-maximum likelihood estimation of ARCH( $\infty$ ) models. **The Annals of Statistics**, v. 34, n. 3, p.1049–1074, 2006.

SANTOS, A. A. P. ; MOURA, G. V.. Dynamic factor multivariate garch model. **Forthcoming, Computational Statistics & Data Analysis**, 2012.

SHEPPARD, K. Multi-step estimation of multivariate GARCH models. In: INTERNATIONAL ICSC. SYMPOSIUM: ADVANCED COMPUTING IN FINANCIAL MARKETS, 2003. **Proceedings**, 2003.

SVENSSON, L. O.. **Estimating and interpreting forward interest rates: sweden 1992-1994**. IMF Working Papers 94/114, International Monetary Fund, September 1994.

VASICEK, O.. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, v. 5, n. 2, p. 177–188, November 1977.

Wilhelm, J. Fristigkeitsstruktur und zinsänderungsrisiko-vorüberlegungen zu einer markowitz-theorie des bond-portfolio-management. **Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung**, v. 44, n. 1992, p. 209–246, 1992.

ZAKOIAN, J.M. Threshold heteroskedastic models. **Journal of Economic Dynamics and control**, v. 18, n.5, p.931–955, 1994.

ZIVOT, E. Practical issues in the analysis of univariate GARCH models. In: ANDERSEN T.G.; . DAVIS, R.A.; KREISS J.P.; MIKOSCH, T. (editors) **Handbook of financial time series**. Springer Verlag, 2009.



Artigo recebido em 12/07/2012 e aceito para publicação em: 15/09/2012